

Reg. No. :

Code No. : 20573 B Sub. Code : SMMA 41

B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, APRIL 2021.

Fourth Semester

Mathematics — Core

ABSTRACT ALGEBRA — I

(For those who joined in July 2017 onwards)

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

PART A — ($10 \times 1 = 10$ marks)

Answer ALL questions.

Choose the correct answer.

1. (Z_8, \oplus) என்ற குலத்தில், உறுப்பு 3-ன் வரிசை

(அ) 2

(ஆ) 4

(இ) 6

(ஈ) 8

The order of the element 3 in (Z_8, \oplus) is

_____.

(a) 2

(b) 4

(c) 6

(d) 8

2. கீழ்வருவனவற்றில் எது குலம்?

- (அ) (Z_6, \odot) (ஆ) (Z_7, \odot)
(இ) $(Z_{11} - \{0\}, \odot)$ (ஈ) $(Z_8 - \{0\}, \odot)$

Which one of the following is a group?

- (a) (Z_6, \odot) (b) (Z_7, \odot)
(c) $(Z_{11} - \{0\}, \odot)$ (d) $(Z_8 - \{0\}, \odot)$

3. (Z_{12}, \oplus) என்ற குலத்தின் பிறப்பாக்கிகளின் கணம் _____.

- (அ) $\{1, 2, 3, 4\}$ (ஆ) $\{1, 3, 6, 9\}$
(இ) $\{1, 5, 7, 11\}$ (ஈ) $\{2, 3, 5, 7\}$

The set of generators of the group (Z_{12}, \oplus) is _____.

- (a) $\{1, 2, 3, 4\}$ (b) $\{1, 3, 6, 9\}$
(c) $\{1, 5, 7, 11\}$ (d) $\{2, 3, 5, 7\}$

4. குலம் (Z_{18}, \oplus) -ன் வட்ட உட்குலம் $\langle 2 \rangle$ -ல் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை _____.

- (அ) 1 (ஆ) 18
(இ) 9 (ஈ) 5

Number of elements in the cyclic subgroup $\langle 2 \rangle$ of (Z_{18}, \oplus) is

- (a) 1 (b) 18
(c) 9 (d) 5

5. $Z_{60}/\langle 5 \rangle$ என்ற வகுத்தற்குலத்தின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை _____

- (அ) 3 (ஆ) 5
(இ) 15 (ஈ) 20

The number of elements in the quotient group $Z_{60}/\langle 5 \rangle$ is

- (a) 3 (b) 5
(c) 15 (d) 20

6. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ என்பது ஒரு வரிசை மாற்றம் எனில் α^{-1} என்பது _____.

- (அ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (ஆ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
(இ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (ஈ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

If $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ is a permutation then α^{-1} is

_____.

- (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

7. பின்வருவனவற்றில் எது வளையம் அல்லாதது?

- (அ) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ (ஆ) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$
(இ) $(\mathbb{Z}_n, \odot, \oplus)$ (ஈ) $(\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$

Which one of the following is not a ring?

- (a) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ (b) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$
(c) $(\mathbb{Z}_n, \odot, \oplus)$ (d) $(\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$

8. \mathbb{Z} என்ற வளையத்தில் (n) என்பது ஒரு மீப்பெரு
கருத்தியல் \Leftrightarrow

- (அ) n ஒரு பகா எண் (ஆ) n ஒரு பகு எண்
(இ) $n \neq 2$ (ஈ) $n > 13$

In the ring \mathbb{Z} , (n) is a maximal ideal \Leftrightarrow _____.

- (a) n is a prime number
- (b) n is a composite number
- (c) $n \neq 2$
- (d) $n > 13$

9. $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ என்ற சார்பு $f(z) = \bar{z}$ என வரையறுக்கப் படுகிறது எனில் f -ன் உட்கரு _____.

- (அ) \emptyset (ஆ) $\{0\}$
- (இ) $\{1\}$ (ஈ) $\{i\}$

Let $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ be defined by $f(z) = \bar{z}$. Then kerf is _____.

- (a) \emptyset (b) $\{0\}$
- (c) $\{1\}$ (d) $\{i\}$

10. \mathbb{Q} -ன் ஈவுகளின் புலம் _____.

- (அ) \mathbb{Q} (ஆ) \mathbb{N}
- (இ) \mathbb{Z} (ஈ) ஏதுமில்லை

Field of quotients of \mathbb{Q} is _____

- (a) \mathbb{Q} (b) \mathbb{N}
(c) \mathbb{Z} (d) None

PART B — ($5 \times 5 = 25$ marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

11. (அ) G என்பது இரட்டை எண்ணிக்கையுடைய உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு முடிவுறு குலம் எனில் குறைந்தபட்சம் வரிசை 2 உடைய ஒரு உறுப்பேனும் G -யில் இருக்கும் என நிறுவுக.

If G is a finite group with even number of elements then prove that G contains atleast one element of order 2.

Or

- (ஆ) H மற்றும் K என்பன G என்ற குலத்தின் உட்குலங்கள் எனில் $H \cap K$ என்பது G -யின் உட்குலம் என நிரூபி.

If H and K are subgroups of a group G then prove that $H \cap K$ is also a subgroup of G .

12. (அ) வட்ட குலத்தை வரையறு. ஒரு வட்டகுலத்தின் உட்குலமும் வட்டகுலம் என நிறுவுக.

Define a cyclic group. Prove that a subgroup of a cyclic group is cyclic.

Or

- (ஆ) ஆய்லரின் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

State and prove Euler's theorem.

13. (அ) எந்தவொரு முடிவுறா வட்டகுலமும் $(\mathbb{Z}, +)$ என்ற குலத்துடன் சம ஒப்புமை உடையது என நிறுவுக.

Prove that any infinite cyclic group is isomorphic to $(\mathbb{Z}, +)$.

Or

- (ஆ) N என்பது G என்ற குலத்தின் நேர்மை உட்குலம் எனில் G/N ஒரு குலம் எனக் காட்டுக.

Let N be a normal subgroup of a group G . Show that G/N is a group.

14. (அ) R ஒரு வளையம், $a, b \in R$ எனில்

(i) $0.a = a.0 = 0$

(ii) $a(-b) = (-a)b = -(ab)$

(iii) $(-a)(-b) = ab$

(iv) $a.(b-c) = a.b - a.c$ என நிறுவுக.

Let R be a ring and $a, b \in R$. Prove that

(i) $0.a = a.0 = 0$

(ii) $a(-b) = (-a)b = -(ab)$

(iii) $(-a)(-b) = ab$

(iv) $a.(b-c) = a.b - a.c$.

Or

(ஆ) R என்பது சமனி உறுப்புடைய ஒரு பரிமாற்று வளையம் என்க. ஒரு கருத்தியல் P பகா கருத்தியல் என்றால் மட்டுமே R/P ஒரு தொகுப்புக் களம் என நிரூபி.

Let R be a commutative ring with identity and P be an ideal of R . Prove that P is a prime ideal iff R/P is an integral domain.

15. (அ) R மற்றும் R' என்பன வளையம் என்க.
 $f: R \rightarrow R'$ என்பது புனல்சார்பு என்க.
 $\ker f = \{0\}$ என்றால் மட்டுமே f ஒரு ஒன்றுக்கு
ஒன்றான சார்பு என நிறுவுக.

Let R and R' be rings and $f: R \rightarrow R'$ be a
homomorphism. Prove that $\ker f = \{0\}$ iff f is
one-one

Or

- (ஆ) $R[x]$ ஒரு தொகுப்பு களம் என்றால் மட்டுமே R
ஒரு தொகுப்பு களம் ஆகும் என நிரூபி.

Prove that $R[x]$ is an integral domain $\Leftrightarrow R$ is
an integral domain.

PART C — ($5 \times 8 = 40$ marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

16. (அ) G என்ற குலத்தின் உறுப்புகள் ' a ' and ' b ' எனில்
கீழ்க்கண்டவற்றை நிறுவுக.

- (i) a -ன் வரிசை = a^{-1} -ன் வரிசை
- (ii) a -ன் வரிசை = $b^{-1}ab$ -ன் வரிசை
- (iii) ab -ன் வரிசை = ba -ன் வரிசை

If 'a' and 'b' are elements of a group G then prove the following :

- (i) Order of a = Order of a^{-1}
- (ii) Order of a = Order of $b^{-1}ab$
- (iii) Order of ab = Order of ba

Or

- (ஆ) G என்ற குலத்தின் இரு உட்குலங்களின் சேர்ப்புக் கணம் ஒரு உட்குலம் என்றால் மட்டுமே ஒன்று மற்றொன்றின் உள் இருக்கும் என காட்டுக.

Show that the union of two subgroups of a group G is a subgroup iff one is contained in the other.

17. (அ) ஒரு குலத்தின் இட இணைகணங்களின் தொகுப்பு அக்குலத்தின் பிரிவினை ஆகும் என நிறுவுக.

Prove that the collection of all left cosets forms a partition of the group.

Or

- (ஆ) H மற்றும் K என்பன குலம் G -ன் வரையறுக்கப்பட்ட குறியீட்டு உட்குலங்கள் எனில் $H \cap K$ என்பது G -ன் வரையறுக்கப்பட்ட குறியீட்டு உட்குலம் என நிரூபி.

Let H and K be two subgroups of G of finite index in G . Prove that $H \cap K$ is a subgroup of finite index in G .

18. (அ) கொடுக்கப்பட்ட வரிசையில் குலம் G -க்கு ஒரே ஒரு உட்குலம் H எனில் அந்த உட்குலம் H ஒரு நேர்மை உட்குலம் என காட்டுக.

If a group G has exactly one subgroup H of given order then show that H is a normal subgroup of G .

Or

- (ஆ) கெய்லியின் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

State and prove Cayley's theorem.

19. (அ) R என்பது சமனி உடைய ஒரு பரிமாற்று வளையம் என்க. R -ன் கருத்தியல் M ஒரு மிகுவரை கருத்தியல் என்றால் மட்டுமே R/M ஒரு களம் என நிரூபி.

Let R be a commutative ring with identity. Prove that an ideal M of R is maximal iff R/M is a field.

Or

- (ஆ) கீழ்க்கண்டவற்றை நிறுவுக.

- (i) Z_n என்பது ஒரு புலம் $\Leftrightarrow n$ ஒரு பகா எண்.
(ii) ஒரு தொகுப்புகளின் சிறப்பியல்பு 0 அல்லது ஒரு பகா எண்.

Prove the following :

- (i) Z_n is a field $\Leftrightarrow n$ is prime.
- (ii) The characteristic of an integral domain is either 0 or a prime number.

20. (அ) வளையங்களுக்கிடையேயான புனல் சார்பின் அடிப்படைத் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

State and prove the fundamental theorem of homomorphism for rings.

Or

- (ஆ) எந்தவொரு தொகுப்பு களத்தையும் ஒரு புலத்தில் பதிக்க முடியும் என நிரூபி.

Prove that every integral domain can be embedded in a field.
